

Probabilités (premières notions)

1) Notion de probabilité :

a) Vocabulaire :

Expérience aléatoire, issue :

Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** possibles et qu'on ne peut pas prévoir à l'avance quel résultat se produira.

Exemple :

On tourne une roue **bien équilibrée** ci-contre et on relève le numéro du secteur qui s'arrête devant la flèche.

Les **issues** possibles sont ici 1, 2 ou 3. On ne peut pas prévoir à l'avance le numéro qui va être sélectionné : cette expérience est donc **aléatoire**.



Nous allons déterminer, pour chaque issue, la probabilité (c'est-à-dire le pourcentage de chance) qu'elle a d'apparaître.

Tous les secteurs sont de la même taille, ils ont tous la même chance d'apparaître :

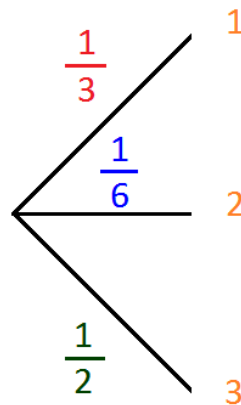
- **secteur 1 :** il y a deux secteurs numérotés 1 sur les 6 secteurs de la roue. La probabilité de sortie du numéro 1 est donc $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Cela signifie que le numéro 1 a **1** chance sur **3** d'être choisi.
- **secteur 2 :** il y a un secteur numéroté 2 sur les 6 secteurs de la roue. La probabilité de sortie du numéro 2 est donc $\frac{1}{6}$.
- **secteur 3 :** il y a trois secteurs numérotés 3 sur les 6 secteurs de la roue. La probabilité de sortie du numéro 3 est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

De façon générale :

- La probabilité d'une issue est un nombre compris entre 0 et 1.
- La somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Arbre des probabilités :

On résume toutes ces informations sur un arbre pondéré par les probabilités ci-dessous :



Arbre des probabilités relatif à l'expérience

Événement :

Un événement est constitué par une ou plusieurs issues d'une expérience aléatoire : on dit qu'une de ces issues réalise l'événement.

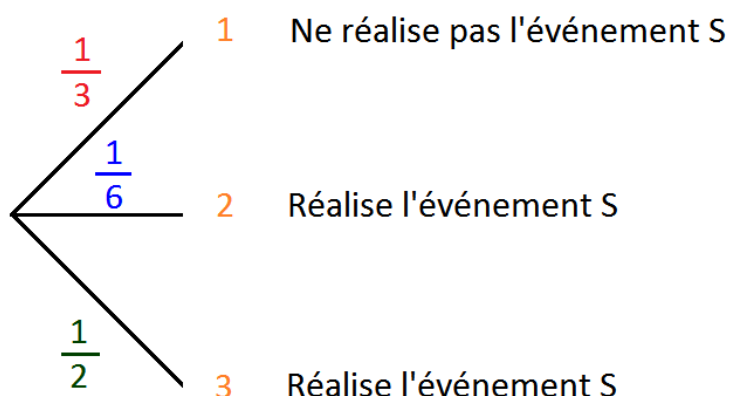
Par exemple, l'événement « obtenir un nombre impair » est constitué par les issues 1 et 3 du tirage de la roue précédente.

b) Propriétés :

Avec un arbre, la probabilité d'un événement E, notée $p(E)$, est égale à la somme des probabilités écrites sur les branches conduisant aux issues qui réalisent l'événement.

Exemple :

Prenons l'expérience de la roue précédente, et notons S l'événement « sortie d'un nombre supérieur ou égal à 2 » : il est réalisé par l'issue 2 ou par l'issue 3.



D'après la propriété précédente, la probabilité de l'événement S est :

$$p(S) = p(2) + p(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, il y a deux chances sur trois d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 2 avec l'expérience de la roue.

Propriété :

Soit A un événement. On a :

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Un événement est dit **impossible** s'il ne peut pas se produire : sa probabilité est égale à **0**.

Exemple : $p(\text{« Obtenir un nombre pair et impair »}) = 0$

Un événement est dit **certain** s'il se produit tout le temps : sa probabilité est égale à **1**.

Exemple : $p(\text{« Obtenir un nombre compris entre 1 et 3 »}) = 1$ sur la roue précédente.

c) Fréquences et probabilités :

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement devient proche de sa probabilité.

Exemple :

Au jeu de pile ou face, l'événement P « sortie de pile » a une probabilité de 0,5 car il y a une chance sur deux d'obtenir la face pile de la pièce.

Si, par exemple, on réalise 10 000 fois l'expérience du lancer de la pièce, on n'obtiendra pas forcément 5 000 piles et 5 000 faces mais la fréquence d'apparition de pile sera proche de 0,5.

II) Événements incompatibles, événements contraires :

Définition :

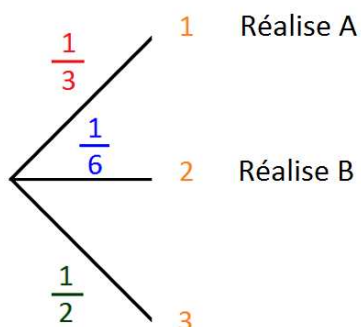
Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Par exemple, l'événement « j'obtiens 3 au lancer d'un dé » et l'événement « j'obtiens 5 au lancer d'un dé » sont incompatibles.

Propriété :

Lorsque deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités.

Exemple :



On reprend l'exemple de la loterie. Les événements **A** « Sortie du 1 » et **B** « Sortie du 2 » sont incompatibles.

La probabilité de la sortie du 1 ou de la sortie du 2 est donc $p(A) + p(B)$, c'est-à-dire :

$$p(A) + p(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Définition :

L'événement contraire d'un événement A est celui qui se réalise quand A ne se réalise pas. On le note non(A) ou \bar{A} .

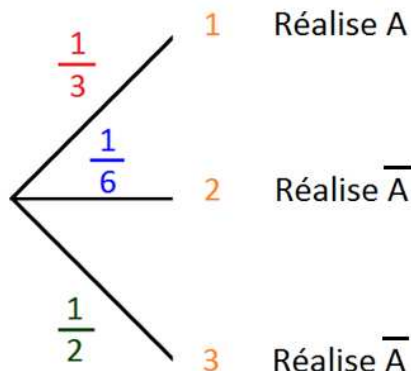
Par exemple, l'événement « j'obtiens pile au lancer d'une pièce » et l'événement « j'obtiens face au lancer d'une pièce » sont **contraires**.

Propriété :

Soit A un événement donné et \bar{A} son contraire. On a :

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1.$$

Exemple :



On reprend l'exemple de la loterie.

Le contraire de l'événement A « Sortie du 1 » est l'événement \bar{A} « Sortie d'un numéro différent de 1 ». Sa probabilité est :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

On remarquera que $p(\bar{A}) = p(2) + p(3)$.

II) Expériences aléatoires à deux épreuves, exemple :

Vocabulaire :

Sur l'arbre des probabilités d'une expérience aléatoire à deux épreuves, une succession de deux branches est appelé un **chemin**.

Propriété :

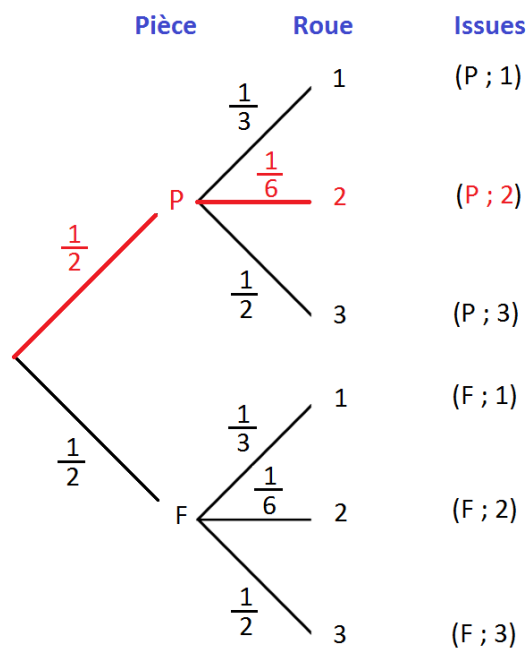
Sur un arbre, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Exemple :

Soit l'expérience définie par un lancer d'une pièce (on notera P le côté pile de la pièce et F le côté face) bien équilibrée suivi d'un tour de roue de loterie du premier paragraphe.

Un résultat P pour la pièce et 2 pour le secteur obtenu à la roue sera noté (P ; 2).

L'arbre des probabilités est le suivant :



La probabilité de l'issue (P ; 2) est égale au produit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$ c'est-à-dire $\frac{1}{12}$.

Cela signifie qu'il y a 1 chance sur 12 d'obtenir Pile au lancer de la pièce et de tomber sur le secteur 2 de la roue.