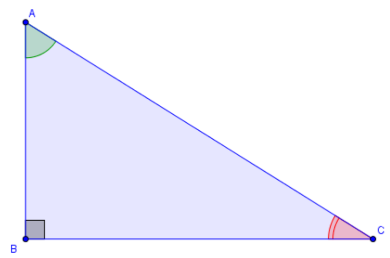
Théorèmes et réciproques de Pythagore et Thales

I) Théorème de Pythagore :

Soit ABC un triangle rectangle en B :



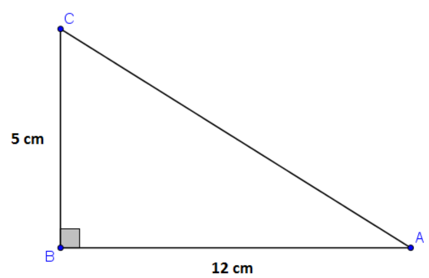
Théorème de Pythagore :

Si ABC est un triangle rectangle en B alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Exemple n°1 (calcul de la longueur de l'hypoténuse) :

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que AB = 12 cm et BC = 5 cm.

Déterminer la longueur de [AC].



Rédaction correcte :

Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

En remplaçant par les données de l'énoncé, on obtient :

$AC^2 = 12^2 + 5^2$

$AC^2 = 144 + 25$

$AC^2 = 169$

$AC = \sqrt{169}$

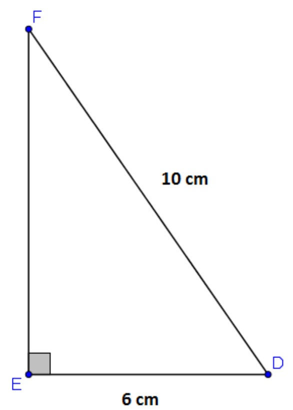
$AC = 13$

La longueur de [AC] est 13 cm.

Exemple n°2 (calcul de la longueur d'un des côtés de l'angle droit) :

Soit EDF un triangle rectangle en E tel que DF = 10 cm et ED = 6 cm.

Déterminer la longueur de [EF].



Rédaction correcte :

Dans le triangle EDF, rectangle en E, on a d'après le théorème de Pythagore :

$DF^2 = DE^2 + EF^2$

En remplaçant par les données de l'énoncé, on obtient :

$10^2 = 6^2 + EF^2$

$100 = 36 + EF^2$

$EF^2 = 100 - 36$

$EF^2 = 64$

$EF = \sqrt{64}$

$EF = 8$

La longueur de [EF] est 8 cm.

II) Réciproque du théorème de Pythagore :

Enoncé de la réciproque :

Dans un triangle, si le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple n°1 (cas où le triangle est rectangle) :

Soit ABC un triangle tel que AC = 9 cm, AB = 12 cm et BC = 15 cm.

Ce triangle est-il rectangle ?

Rédaction correcte :

Calcul du carré de la plus grande longueur :

$BC^2 = 15^2$

$BC^2 = 225$

Calcul de la somme des carrés des deux autres longueurs :

$AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2$

$AB^2 + AC^2 = 81 + 144$

$AB^2 + AC^2 = 225$

Conclusion :

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Exemple n°2 (cas où le triangle n'est pas rectangle) :

Soit JKL un triangle tel que JK = 7 cm, IK = 8 cm et KL = 11 cm.

Ce triangle est-il rectangle ?

Rédaction correcte :

Calcul du carré de la plus grande longueur :

$KL^2 = 11^2$

$KL^2 = 121$

Calcul de la somme des carrés des deux autres longueurs :

$IK^2 + JK^2 = 8^2 + 7^2$

$IK^2 + JK^2 = 64 + 49$

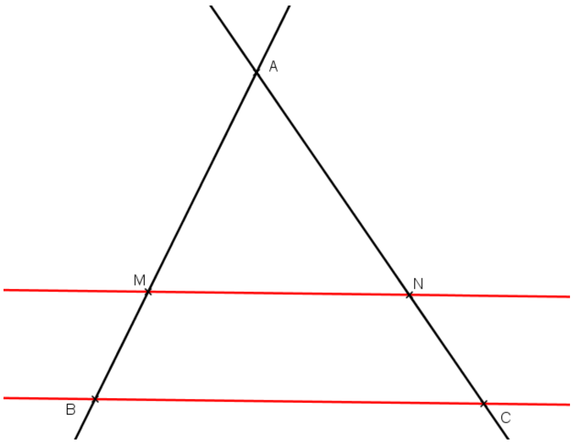
$IK^2 + JK^2 = 113$

Conclusion :

Comme $KL^2 \neq IK^2 + JK^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle JKL n'est pas rectangle.

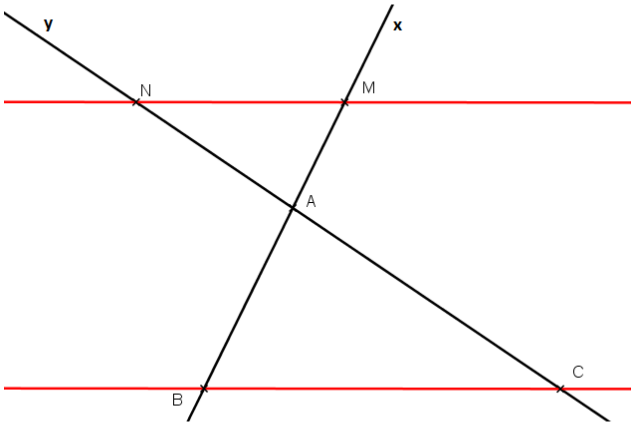
III) Les deux configurations de Thales :

a) La configuration standard :



(AB) et (AC) sont sécantes en A. M est un point de [AB] et N un point de [AC] tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

b) La configuration papillon :



(AB) et (AC) sont sécantes en A. M est un point de [Ax) et N est un point de [Ay) tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

III) Le théorème de Thales :

Le théorème de Thalès s'applique sur l'une des deux configurations précédentes.

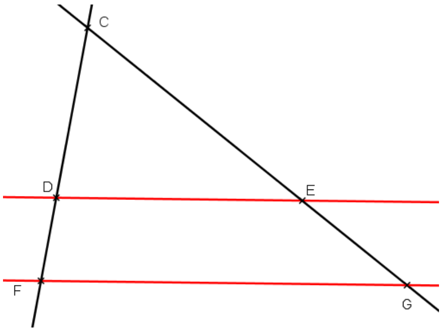
Enoncé du théorème :

Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A. M est un point de (AB) et N est un point de (AC) tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on peut écrire que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

On utilise le théorème de Thalès pour calculer une longueur.

Exemple :



Données de l'énoncé :

CD = 5 cm
CE = 4 cm
CF = 9 cm
(DE) // (FG)

Question : Calculer CG.

La figure ci-dessus représente une configuration de Thalès, on peut donc appliquer le théorème :

Voici une des rédactions correcte :

(CF) et (CG) deux droites sécantes en C.

D est un point de (CF) et E est un point de (CG) tels que les droites (DE) et (FG) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on peut écrire que :

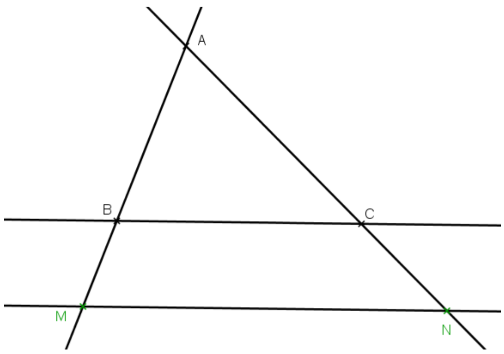
$$\frac{CD}{CF} = \frac{CE}{CG} = \frac{DE}{FG}$$

on connait on cherche

On choisit $\frac{CD}{CF} = \frac{CE}{CG}$ soit $\frac{5}{9} = \frac{4}{CG}$.

Ce qui nous donne CG = $\frac{4 \times 9}{5}$ = 7,2 cm.

IV) La réciproque du théorème de Thales :



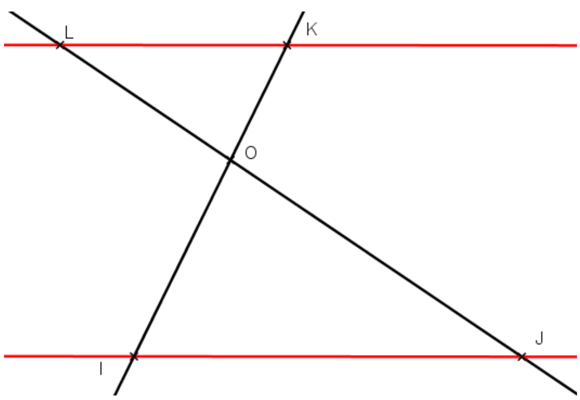
Enoncé de la réciproque du théorème de Thalès :

Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A. M est un point de (AB) et N est un point de (AC) tels que les points A, B et M d'une part et A, C et M d'autre part sont alignés dans le même ordre.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

On utilise la réciproque pour démontrer que deux droites sont parallèles.

Exemple n°1 (cas où les droites sont parallèles) :



On donne :

OL = 12 cm

OK = 9 cm

OI = 3 cm

OJ = 4 cm

(IJ) et (LK) sont-elles parallèles ?

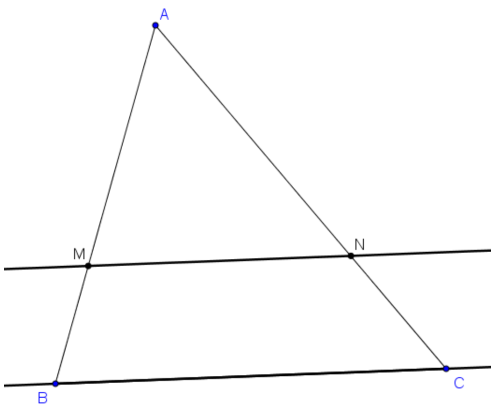
Rédaction correcte :

Les points L, O et J sont alignés dans le même ordre que les points K, O et I.
On a :

- $\frac{OL}{OJ} = \frac{12}{4}$ c'est-à-dire $\frac{OL}{OJ} = 3$.
- $\frac{OK}{OI} = \frac{9}{3}$ c'est-à-dire $\frac{OK}{OI} = 3$.

Comme $\frac{OK}{OI} = \frac{OL}{OJ}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (LK) sont parallèles.

Exemple n°2 (cas où les droites ne sont pas parallèles) :



On donne :

AM = 6 cm
AB = 14 cm
MN = 8 cm
BC = 22 cm

(MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Rédaction correcte :

Les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C.

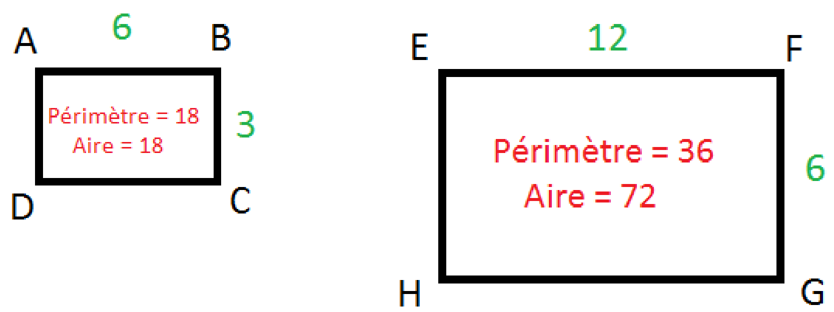
On a :

- $\frac{AM}{AB} = \frac{6}{14}$ c'est-à-dire $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$.
- $\frac{MN}{BC} = \frac{8}{22}$ c'est-à-dire $\frac{MN}{BC} = \frac{4}{11}$.

Comme $\frac{AM}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

V) Agrandissement et réduction :

Exemple : Déterminer l'aire et le périmètre des deux rectangles ci-dessous :



=> On est passé des dimensions du rectangle ABCD aux dimensions du rectangle EFGH en multipliant par 2. On constate alors que :

- Périmètre EFGH = 2 × Périmètre ABCD.
- Aire EFGH = 4 × Aire ABCD = 2^2 × Aire ABCD

Propriété :

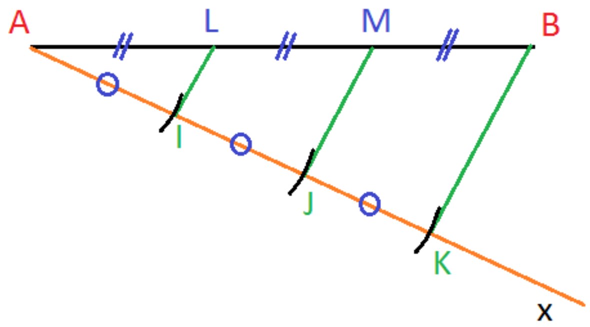
Quand on multiplie les dimensions d'une figure par un nombre k, son périmètre est multiplié par k, son aire par k^2 et son volume par k^3.

Remarque :

Lorsque k > 1, on parle d'agrandissement et lorsque k < 1, on parle de réduction.

VI) Partage d’un segment en plusieurs segments de même longueur :

Exemple : Partager le segment [AB] en trois segments de la même longueur.



Méthode :

1) Construire une demi-droite [Ax), celle qu’on veut.
2) Sur cette demi-droite, construire à l’aide du compas (choisir l’écart que l’on veut, ni trop grand, ni trop petit) trois segments [AI], [IJ] et [JK] de la même longueur.
3) Tracer le segment [BK].
4) Construire les parallèles à (BK) passant par I et J : elles coupent [AB] en L et M.
5) Les segments [AL], [LM] et [MB] obtenus sont de même longueur.