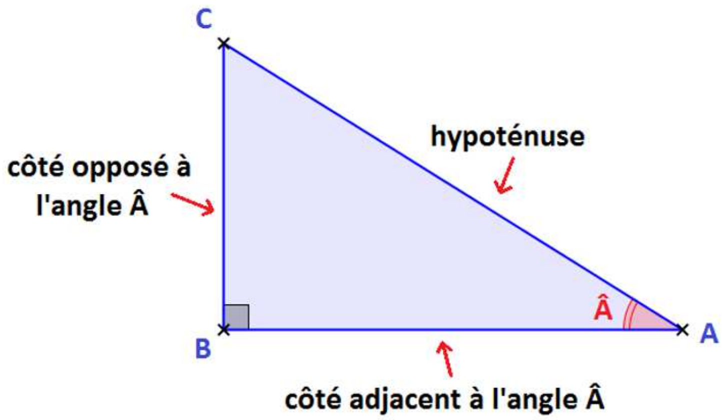
Triangle rectangle et trigonométrie

I) Cosinus, Sinus, Tangente d'un angle aigu :

a) Vocabulaire :

Soit ABC un triangle rectangle en B.



b) Définition :

Soit ABC un triangle rectangle en B.

1) $\mathrm{Cos}(\hat{A}) = \dfrac{longueur\ côté\ adjacent\ \text{à}\ l'angle\ \hat{A}}{longueur\ hypoténuse}$

2) $\mathrm{Sin}(\hat{A}) = \dfrac{longueur\ côté\ opposé\ \text{à}\ l'angle\ \hat{A}}{longueur\ hypoténuse}$

3) $\mathrm{Tan}(\hat{A}) = \dfrac{longueur\ côté\ opposé\ \text{à}\ l'angle\ \hat{A}}{longueur\ côté\ adjacent\ \text{à}\ l'angle\ \hat{A}}$

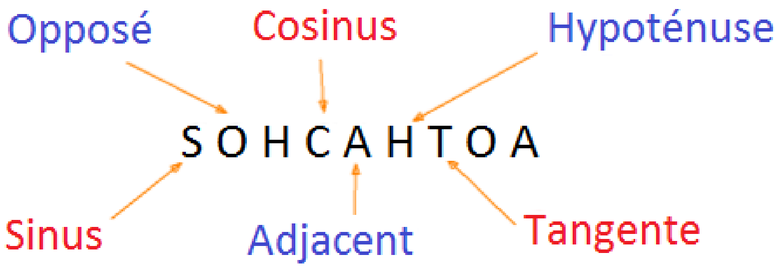
Remarque :

Cos(Â) se lit « cosinus de l'angle Â ».

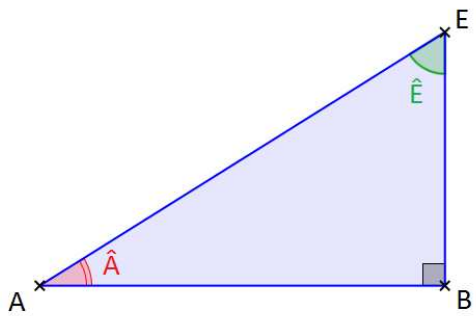
Sin(Â) se lit « sinus de l'angle Â ».

Tan(Â) se lit « tangente de l'angle Â ».

c) Moyen mnémotechnique :



d) Exemple :



Dans le triangle ABE, rectangle en B, on a :

$$\text{Cos}(\hat{A}) = \frac{longueur\ côté\ adjacent\ à\ l'angle\ \hat{A}}{longueur\ hypoténuse} = \frac{AB}{AE}$$

$$\text{Sin}(\hat{A}) = \frac{longueur\ côté\ opposé\ à\ l'angle\ \hat{A}}{longueur\ hypoténuse} = \frac{BE}{AE}$$

$$\text{Tan}(\hat{A}) = \frac{longueur\ côté\ opposé\ à\ l'angle\ \hat{A}}{longueur\ côté\ adjacent\ à\ l'angle\ \hat{A}} = \frac{BE}{AB}$$

De même : Cos(Ê) = $\frac{BE}{AE}$, Sin(Ê) = $\frac{AB}{AE}$, Tan(Ê) = $\frac{AB}{BE}$.

e) Remarques :

- Un cosinus, un sinus ou une tangente n'a pas d'unité.
- Cos(Â), Sin(Â), Tan(Â) sont des nombres positifs car ce sont des rapports de longueurs.

- L'hypoténuse étant le côté le plus long d'un triangle rectangle, on en déduit que :

$$\text{Cos}(\hat{A}) = \frac{longueur\ \text{côté}\ adjacent\ \text{à}\ l'angle\ \hat{A}}{longueur\ \text{hypoténuse}} < 1$$

$$\text{Sin}(\hat{A}) = \frac{longueur\ \text{côté opposé à}\ l'angle\ \hat{A}}{longueur\ \text{hypoténuse}} < 1$$

C'est-à-dire, pour tout angle aigu Â, on a :

$0 < \text{Cos}(\hat{A}) < 1$ et $0 < \text{Sin}(\hat{A}) < 1$

- On ne calcule pas le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle nul ou droit en troisième car on se limite aux angles aigus (angle de mesure comprise entre 0° et 90°).

II) Applications :

a) Calculer l'arrondi au degré de la mesure d'un angle aigu :

Exemple :

Déterminer à l'aide de la calculatrice la mesure de l'angle Â sachant que cos(Â) = 0,5.

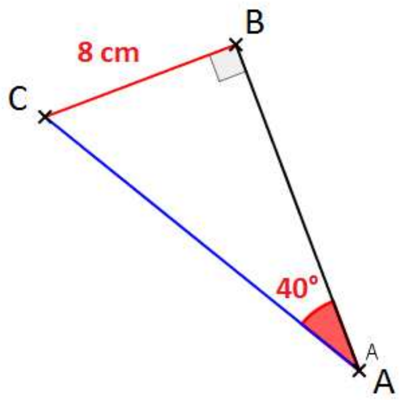
Avec la CASIO Collège : $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{Cos}}$ 0.5 $\boxed{\text{EXE}}$

Avec la TI Collège : $\boxed{2^{\text{nde}}}$ $\boxed{\text{Cos}}$ 0.5 $\boxed{\text{Entrer}}$

La machine nous donne alors Â = 60°.

On fait de même pour le sinus ou la tangente.

b) Calcul de la longueur d'un côté d'un triangle rectangle :



ABC est un triangle rectangle en B.
On donne BC = 8 cm et Â = 40°.
Déterminer la longueur AC.

Conseil : dessiner d'une couleur ce que l'on connaît et d'une autre ce qu'on cherche (ici, en rouge ce qu'on connaît, en bleu ce qu'on cherche).

Commentaire de cet exercice : dans cet exemple on connait la mesure de l'angle Â, la longueur du côté [BC] opposé à l'angle Â et on cherche la longueur de l'hypoténuse [AC].

On va donc utiliser la relation sinus.

Exemple rédigé correctement :

Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :

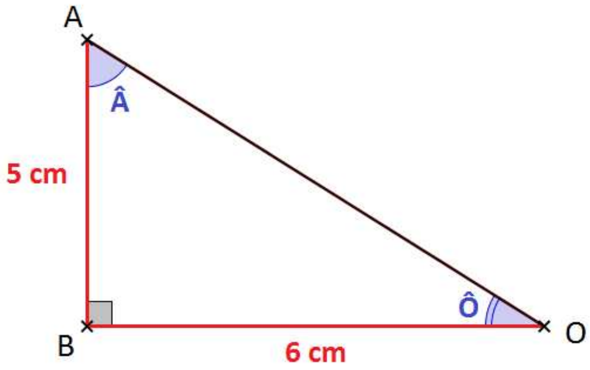
Sin(Â) = $\frac{BC}{AC}$ c'est-à-dire Sin(40) = $\frac{8}{AC}$ ou $\frac{Sin(40)}{1} = \frac{8}{AC}$.

(cette dernière égalité permet ensuite d'utiliser les produits en croix).

Ainsi, AC × Sin(40) = 8 × 1 c'est-à-dire AC = $\frac{8}{Sin(40)}$.

La calculatrice nous donne AC = 12,4 valeur arrondie au dixième.

c) Calcul de la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle :



ABO est un triangle rectangle en B.

On donne AB = 5 cm, BO = 6 cm.

Déterminer la mesure de l'angle Â arrondie à l'entier le plus proche.

En déduire celle de l'angle Ô.

Commentaire de cet exercice : dans cet exemple on cherche la mesure de l'angle Â, on connait la longueur du côté [BO] opposé à l'angle Â et la longueur du côté [AB] adjacent à l'angle Â.

On va donc utiliser la relation tangente.

Exemple rédigé correctement :

Dans le triangle ABO, rectangle en B, on a :

Tan(Â) = $\frac{BO}{AB}$ c'est-à-dire Tan(Â) = $\frac{6}{5}$.

La calculatrice nous donne Â = 50°, valeur arrondie à l'unité.

Les angles Â et Ô étant complémentaires, on a Â + Ô = 90.

C'est-à-dire 50 + Ô = 90 ce qui donne Ô = 90 – 50 = 40.

La mesure de l'angle Ô est 40°, valeur arrondie à l'unité.

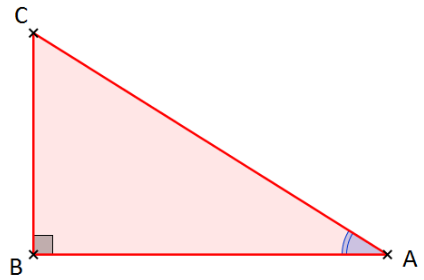
III) Formules fondamentales de la trigonométrie :

a) Propriété :

> Pour tout angle aigu Â, on a :
>
> $\text{Cos}^2(\hat{A}) + \text{Sin}^2(\hat{A}) = 1$ (**1**) et $\text{Tan}(\hat{A}) = \dfrac{Sin(\hat{A})}{Cos(\hat{A})}$ (**2**).

b) Démonstration :

Preuve de (**1**) :



Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :

$$\text{Cos}(\hat{A}) = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad \text{Sin}(\hat{A}) = \frac{BC}{AC}.$$

Ainsi :

$\text{Cos}^2(\hat{A}) + \text{Sin}^2(\hat{A}) = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$ $\text{Cos}^2(\hat{A}) + \text{Sin}^2(\hat{A}) = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2}$ $\text{Cos}^2(\hat{A}) + \text{Sin}^2(\hat{A}) = \frac{AB^2+BC^2}{AC^2}$ $\text{Cos}^2(\hat{A}) + \text{Sin}^2(\hat{A}) = \frac{AC^2}{AC^2}$ d'après (*) $\text{Cos}^2(\hat{A}) + \text{Sin}^2(\hat{A}) = 1$	Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (*)

On a bien montré que pour tout angle aigu Â, $\text{Cos}^2(\hat{A}) + \text{Sin}^2(\hat{A}) = 1$.

Preuve de (**2**) :

$\frac{Sin(\hat{A})}{Cos(\hat{A})} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}}$ c'est-à-dire $\frac{Sin(\hat{A})}{Cos(\hat{A})} = \frac{BC}{\cancel{AC}} \times \frac{\cancel{AC}}{AB} = \frac{BC}{AB}$.

Ce qui revient à : $\frac{Sin(\hat{A})}{Cos(\hat{A})} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{A}}$ = Tan(Â).

On a bien montré que pour tout angle aigu Â, Tan(Â) = $\frac{Sin(\hat{A})}{Cos(\hat{A})}$.