

Fonctions affines et linéaires

I) Fonctions linéaires :

a) Définition :

Soit a un nombre fixé, différent de 0.
On appelle fonction linéaire f , la fonction qui à tout nombre x associe le nombre ax : $f(x) = ax$.
Le nombre a est appelé le coefficient de la fonction linéaire.

Exemples :

La fonction f définie par $f(x) = 3x$ est une fonction linéaire de coefficient 3.

La fonction $h : x \mapsto -4x$ est une fonction linéaire de coefficient -4.

b) Détermination du coefficient d'une fonction linéaire :

Exemple :

Soit f une fonction linéaire telle que $f(3) = 21$.

Déterminer l'expression algébrique de la fonction linéaire f .

Méthode :

$f(x) = ax$ on écrit l'image de x par la fonction linéaire f .

$f(3) = a \times 3$ on remplace x par 3.

$21 = a \times 3$ on remplace $f(3)$ par sa valeur 21.

$a = \frac{21}{3}$ on résout l'équation d'inconnue a .

$a = 7$

Le coefficient de la fonction linéaire est $a = 7$ c'est-à-dire $f(x) = 7x$.

c) Représentation graphique d'une fonction linéaire :

Propriété :

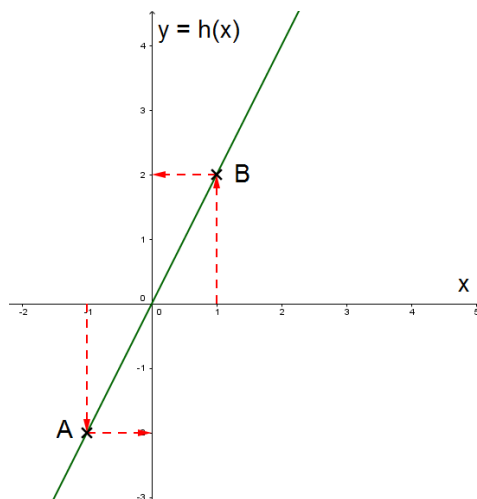
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

Exemple :

Représenter graphiquement la fonction linéaire h définie par $h(x) = 2x$.

Méthode :

- 1) On détermine l'image de deux nombres par la fonction h , on peut choisir -1 et 1 par exemple :
 - $h(-1) = 2 \times (-1) = -2 \Rightarrow$ le point $A(-1, -2)$ appartient à la représentation graphique de la fonction h .
 - $h(1) = 2 \times 1 = 2 \Rightarrow$ le point $B(1, 2)$ appartient à la représentation graphique de la fonction h .
- 2) On trace un repère, on place les points A et B ainsi déterminés puis on trace la droite (AB), représentation graphique de la fonction linéaire h .

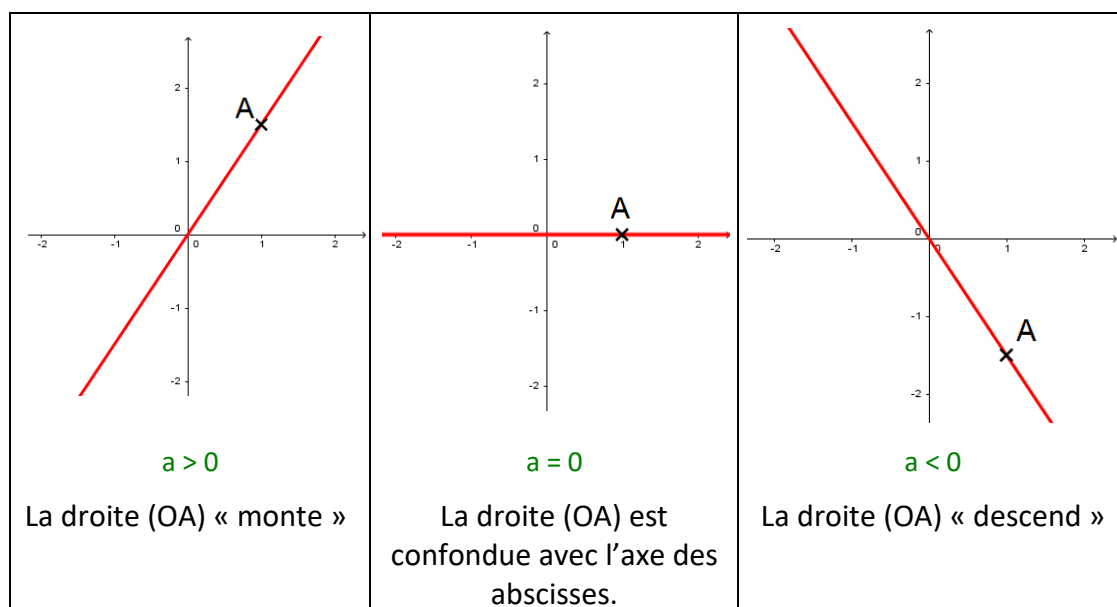


Représentation graphique de la fonction linéaire h

- 3) On dit que l'équation de la droite (AB) ou (OA) est $y = 2x$ et que son coefficient directeur est 2.

Remarque :

Influence du coefficient a d'une fonction linéaire sur la représentation graphique :



d) Fonction linéaire et droite :

Propriété :

Dans un repère, (d) est la représentation graphique d'une fonction linéaire f définie par $f(x) = ax$ et $M(x_M ; y_M)$ est un point donné.

- Si $y_M = ax_M$, alors le point M appartient à la droite (d).
- Réciproquement, si le point M appartient à (d), alors $y_M = ax_M$.

Exemple n°1 : montrer qu'un point appartient à une droite :

Soit (d) la représentation graphique d'une fonction linéaire f définie par $f(x) = 4x$.

Montrons que :

- 1) le point $M(3 ; 12)$ appartient à (d).
- 2) le point $N(-2 ; -7)$ n'appartient pas à (d).

Méthode : pour chaque point, on calcule l'image de son abscisse que l'on compare ensuite avec son ordonnée.

Point M(3 ; 12) :

$f(3) = 4 \times 3 = 12$: comme $12 = 12$, M appartient à la droite (d).

Point N(-2 ; -7) :

$f(-2) = 4 \times (-2) = -8$: comme $-7 \neq -8$, N n'appartient pas à la droite (d).

Exemple n°2 : Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à (d) :

Soit (d) la représentation graphique d'une fonction linéaire f définie par $f(x) = 3x$.

- 1) Calculer l'ordonnée du point M(4 ; y) appartenant à (d).
- 2) Calculer l'abscisse du point N(x ; 12) appartenant à (d).

Point M(4 ; y) :

Méthode : l'ordonnée du point M est égale à l'image de son abscisse.

$$y = f(4) = 3 \times 4 = 12.$$

Les coordonnées du point M sont M(4 ; 12)

Point N(x ; 9) :

Méthode : l'abscisse du point N est égale à l'antécédent de son ordonnée.

On calcule l'antécédent de 9 :

$$f(x) = 9 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3.$$

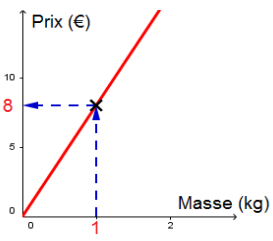
Les coordonnées du point N sont N(3 ; 9)

e) Fonction linéaire et proportionnalité :

Propriété :

Une situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire. Le coefficient de cette fonction linéaire est égal au coefficient de proportionnalité.

Exemple :

Proportionnalité	Fonction linéaire	Graphique
Un fromager vend le Beaufort à 8€ le kg. Si x désigne la masse en kg de fromage, alors le prix à payer $p(x)$ est proportionnel à x . On a : $P(x) = 8x$. 8 est le coefficient de proportionnalité.	Le prix à payer s'exprime à partir de la masse achetée à l'aide de la fonction linéaire p définie par : $p : x \mapsto 8x$. p est une fonction linéaire de coefficient 8.	 La droite représentative a pour équation $y = 8x$. Son coefficient directeur vaut 8.

II) Fonctions affines :

a) Définition :

Soit a et b deux nombres fixés.
On appelle fonction affine f , la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $ax + b$: $f(x) = ax + b$.
Le nombre a est appelé le coefficient de la fonction affine.

Exemples :

La fonction f définie par $f(x) = 3x + 6$ est une fonction affine ($a = 3$, $b = 6$).

Cas particuliers :

- 1) $b = 0$: la fonction affine est alors la fonction linéaire définie par $f(x) = ax$.
- 2) $a = 0$: la fonction affine est alors la fonction constante définie par $f(x) = b$.

b) Détermination des coefficients d'une fonction affine :

Exemple : soit f une fonction affine telle que $f(5) = 16$ et $f(3) = 10$.
Déterminer la fonction f .

Méthode :

On sait que f est une fonction affine, donc elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b$.

Première étape : on écrit les équations définies par $f(5)$ et $f(3)$:

On écrit que :

- $f(5) = 16$ soit en remplaçant : $f(5) = 5a + b = 16$ (E1)
- $f(3) = 10$ soit en remplaçant : $f(3) = 3a + b = 10$ (E2)

Deuxième étape : on calcule la valeur de a :

On soustrait membre à membre les équations (E1) et (E2) :

$$(E1) - (E2) \Rightarrow 5a + b - (3a + b) = 16 - 10$$

$$5a + b - 3a - b = 6$$

$$2a = 6$$

$$a = 3$$

Troisième étape : on calcule la valeur de b :

On sait à présent que $a = 3$ c'est-à-dire on sait que $f(x) = 3x + b$.

On choisit l'une ou l'autre des images données, par exemple $f(5) = 16$.

$$\Rightarrow f(5) = 3 \times 5 + b = 16 \text{ (E3)}$$

On résout l'équation (E3) :

$$3 \times 5 + b = 16 \Rightarrow 15 + b = 16$$

$$b = 16 - 15$$

$$b = 1$$

Quatrième étape : on conclut :

La fonction affine f cherchée est $f(x) = 3x + 1$.

c) Représentation graphique d'une fonction affine :

Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite.

Exemple :

Représenter graphiquement la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 1$.

Méthode :

Première étape : on détermine les images de trois nombres par la fonction f , par exemple -1, 0 et 1.

$$f(-1) = 2 \times (-1) + 1$$

$$f(-1) = -2 + 1$$

$$f(-1) = -1$$

$$f(0) = 2 \times 0 + 1$$

$$f(0) = 0 + 1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2 \times 1 + 1$$

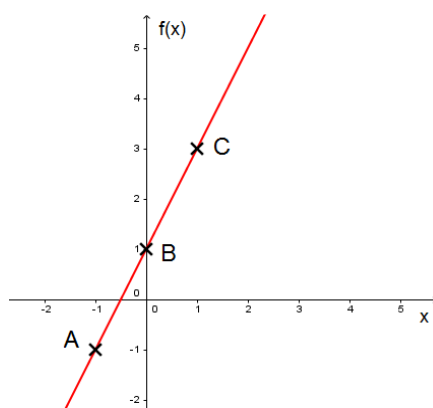
$$f(1) = 2 + 1$$

$$f(1) = 3$$

Deuxième étape : on construit un tableau de points à l'aide de ces valeurs.

Points	A	B	C
x (abscisse)	-1	0	1
$f(x)$ (ordonnée)	-1	1	3

Troisième étape : on place ces points dans un repère et on trace la droite.



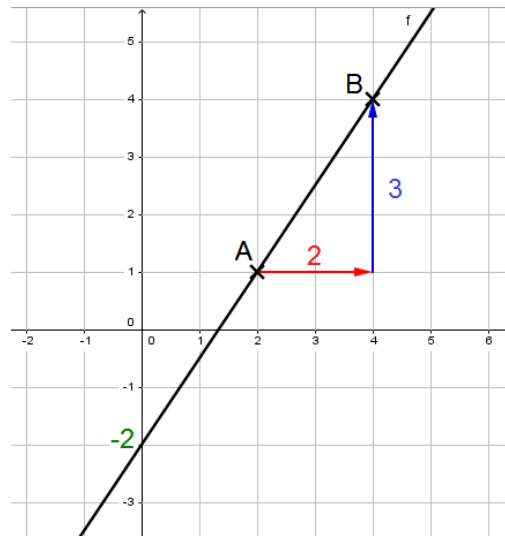
Représentation graphique de la fonction affine f

Remarque : on dit que l'équation de la droite (AB) est $y = 2x + 1$ et que son coefficient directeur est 2.

d) Déterminer une fonction affine à l'aide de sa représentation graphique :

Exemple :

Déterminer la fonction affine f dont la représentation graphique est :



Méthode :

Première étape : repérer deux points sur la droite qui ont des coordonnées entières. Par exemple, les points $A(2 ; 1)$ et $B(4 ; 4)$ conviennent.

Deuxième étape : On se déplace horizontalement et verticalement pour aller du point qui a la plus petite abscisse (ici le point A) vers le point qui a la plus grande abscisse (ici le point B). Dans notre cas, on a un chemin horizontal de longueur **2** unités puis un chemin vertical de longueur **3** unités.

Le coefficient de la fonction affine est égale au quotient de la longueur du chemin vertical par la longueur du chemin horizontal, soit ici $a = \frac{3}{2}$.

Dans le cas où la droite descend, on prend l'opposé de ce quotient.

Troisième étape : La droite coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée **-2** : il s'agit de la valeur de b . Ainsi, $b = -2$.

Quatrième étape : On donne l'écriture algébrique de la fonction affine :

$$\text{La fonction affine cherchée est } f(x) = \frac{3}{2}x - 2.$$

e) Fonction affine et droite :

Propriété :

Dans un repère, (d) est la représentation graphique d'une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$ et $M(x_M ; y_M)$ est un point donné.

- Si $y_M = ax_M + b$, alors le point M appartient à la droite (d).
- Réciproquement, si le point M appartient à (d), alors $y_M = ax_M + b$.

Exemple n°1 : montrer qu'un point appartient à une droite :

Soit (d) la représentation graphique d'une fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 5$.

Montrons que :

- 1) le point $M(4 ; 13)$ appartient à (d).
- 2) le point $N(-6 ; -8)$ n'appartient pas à (d).

Méthode : pour chaque point, on calcule l'image de son abscisse que l'on compare ensuite avec son ordonnée.

Point $M(4 ; 13)$:

$f(4) = 2 \times 4 + 5 = 13$: comme $13 = 13$, M appartient à la droite (d).

Point $N(-6 ; -8)$:

$f(-6) = 2 \times (-6) + 5 = -7$: comme $-8 \neq -7$, N n'appartient pas à la droite (d).

Exemple n°2 : Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à (d) :

Soit (d) la représentation graphique d'une fonction affine f définie par $f(x) = -3x + 7$.

- 1) Calculer l'ordonnée du point $M(-1 ; y)$ appartenant à (d).
- 2) Calculer l'abscisse du point $N(x ; 13)$ appartenant à (d).

Point M(-1 ; y) :

Méthode : l'ordonnée du point M est égale à l'image de son abscisse.

$$y = f(-1) = -3 \times (-1) + 7 = 3 + 7 = 10.$$

Les coordonnées du point M sont M(-1 ; 10)

Point N(x ; 13) :

Méthode : l'abscisse du point N est égale à l'antécédent de son ordonnée.

On calcule l'antécédent de 13 :

$$f(x) = 13 \Rightarrow -3x + 7 = 13 \Rightarrow -3x = 13 - 7 = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{-3} = -2$$

Les coordonnées du point N sont N(-2 ; 13)